ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ С ВОЗМУЩЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© **В. И. Усков**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8
E-mail: vum1@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения с малым параметром при производной с возмущенным с помощью некоторого параметра фредгольмовым оператором в банаховом пространстве. Исследуется влияние этого параметра. Находится решение в виде асимптотического разложения. При решении задачи используется метод каскадной декомпозиции уравнения, позволяющий расщепить уравнение на уравнения в подпространствах.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; асимптотическое решение; малый параметр; возмущение в правой части; фредгольмов оператор; явление погранслоя

Введение

Рассматривается задача:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = (A + c\cdot I)x(t,\varepsilon) + F(t), \tag{0.1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \tag{0.2}$$

где A — линейный замкнутый, вообще говоря неограниченный, фредгольмов оператор с нулевым индексом (далее, Φ_0-оператор), действующий в банаховом пространстве, $\overline{\operatorname{dom} A} = E$; $F(t)$ — заданная функция со значениями в E; $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$; $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$; $t \in [0,T]$.

Об актуальности задачи свидетельствует широкое прикладное значение уравнения (1): движение сильновязкой жидкости (напр., крови в сосудах), поведение тонких упругих оболочек, процессы обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа и т. д.

Приложением исходной задачи может быть начально-краевая задача для уравнения

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial u}{\partial t} + 2c \frac{\partial u}{\partial x} + (\gamma^2 + c^2) u(x,t,\varepsilon) = \varphi(x,t).$$

Это уравнение встречается в теории дифракции, в задачах математической физики, связанных с потенциальными барьерами квантовой физики [1]. В работе [2] исследовано влияние параметра c на поведение решения, а также найдено это решение в виде тригонометрического ряда с обоснованием его сходимости.

Поставленная задача при значении $c = 0$ изучена многими авторами; построено асимптотическое решение различными методами [3–6].

В настоящей работе выявляется условие регулярности вырождения; строится асимптотическое разложение решения задачи (0.1), (0.2) по степеням параметра ε в виде следующего ряда:

$$\begin{gathered} x(t,\varepsilon) = \bar{x}_m(t,\varepsilon) + \bar{v}_m(t,\varepsilon) + R_m(t,\varepsilon), \\ \bar{x}_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k x_k(t), \quad \bar{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k v_k(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \end{gathered} \tag{0.3}$$

где $\bar{x}_m(t,\varepsilon)$ — регулярная часть, $\bar{v}_m(t,\varepsilon)$ — погранслойная часть, $R_m(t,\varepsilon)$ — остаточный член разложения. Доказывается асимптотичность этого разложения.

1. Основные сведения

Приведем сведения, необходимые для решения поставленной задачи.

Свойство 1.1. Линейный Φ_0-оператор $A: E \to E$ обладает свойством:

$$E = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad E = \operatorname{Coker} A \oplus \operatorname{Im} A, \tag{1.1}$$

где $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Coker} A$ — дефектное подпространство; сужение $\tilde{A} = A|_{\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A}$ имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$; $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$ [7].

Пусть P — проектор на $\operatorname{Ker} A$, Q — проектор на $\operatorname{Coker} A$, отвечающие разложениям (1.1), I — единичный оператор в соответствующем подпространстве, $A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q)$ — полуобратный оператор.

Имеет место следующее утверждение о решении линейного уравнения [8, 9].

Лемма 1.1. *Линейное уравнение с Φ_0-оператором A*

$$A\xi = \eta$$

равносильно системе

$$\xi = A^- \eta + P\xi \quad \text{для любого} \quad P\xi \in \operatorname{Ker} A,$$

$$Q\eta = 0.$$

Определение 1.1. Ограниченная функция $v(t,\varepsilon)$, определенная на $[0,T]$, называется *функцией погранслоя вблизи* $t=0$, если при $\varepsilon\to 0$ имеет место $v(t,\varepsilon)\rightrightarrows 0$ на $[t',T]$ для всех $t'\in(0,T)$, и $v(t,\varepsilon)\not\rightrightarrows 0$ на $[0,T]$ [10].

Возможно следующее поведение решения $x(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$:
1) $x(t,\varepsilon)\rightrightarrows \bar{x}(t)$ на $[0,T]$, где $\bar{x}(t)$ — решение предельного уравнения

$$(A+c\cdot I)\bar{x}(t)=-F(t). \tag{1.2}$$

2) $x(t,\varepsilon)=\bar{x}(t)+v(t,\varepsilon)$, где $v(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи $t=0$;
3) $\|x(t,\varepsilon)\|\to+\infty$;
4) $x(t,\varepsilon)$ не имеет предела.

Вводятся следующие обозначения: $U(t)$ — полугрупповой оператор, порожденный оператором A, $R(\lambda)$ — резольвента оператора A.

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$\frac{dw}{dt}=Aw(t),\quad t\in[0,T]. \tag{1.3}$$

Имеет место следующее утверждение [11].

Теорема 1.1. *Для того, чтобы задача Коши для уравнения* (1.3) *с замкнутым оператором* A *была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы для резольвенты* $R(\lambda)$ *выполнялось условие:*

$$\|R^n(\lambda)\|\leqslant\frac{\mu}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^n},\quad(\operatorname{Re}\lambda>\omega) \tag{1.4}$$

при некоторых ω *и* μ. *При этом для соответствующей полугруппы справедливо неравенство:*

$$\|U(t)\|\leqslant\mu e^{\omega t}.$$

Число ω называется типом полугруппы $U(t)$.

2. Решение линейного уравнения с возмущенным оператором

Рассматривается уравнение

$$(A+c\cdot I)v=w \tag{2.1}$$

с линейным Φ_0-оператором A, действующим в банаховом пространстве E; единичным оператором I; некоторым комплексным параметром $c\neq 0$; заданным элементом $w\in E$. Требуется найти элемент $v\in E$.

Исследуется случай, когда операторы A_j, $j=1,2,\ldots$, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned}
&A_0=A,\quad P_0=P,\quad Q_0=Q,\\
&S_1=I,\quad S_j=Q_{j-2}S_{j-1}A^{-}_{j-2}S_{j-1},\quad j=2,3,\ldots,\\
&A_j=Q_{j-1}S_jP_{j-1},\quad j=1,2,\ldots,
\end{aligned}$$

ненулевые.

У с л о в и е 2.1. Существует такое число r, что оператор A_r обратим (в подпространстве $\operatorname{Ker} A_r$). Пусть p – минимум из таких r.

Строятся проекторы P на $\operatorname{Ker} A$, Q на $\operatorname{Coker} A$, отвечающие разложениям:

$$E = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad E = \operatorname{Coker} A \oplus \operatorname{Im} A;$$

проекторы P_j на $\operatorname{Ker} A_j$, Q_j на $\operatorname{Coker} A_j$, отвечающие разложениям:

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A_1 \oplus \operatorname{Coim} A_1, \quad \operatorname{Coker} A = \operatorname{Coker} A_1 \oplus \operatorname{Im} A_1;$$
$$\operatorname{Ker} A_j = \operatorname{Ker} A_{j+1} \oplus \operatorname{Coim} A_{j+1}, \quad \operatorname{Coker} A_j = \operatorname{Coker} A_{j+1} \oplus \operatorname{Im} A_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots;$$

полуобратные операторы A^-, A_j^-, $j = 1, 2, \ldots$.

Вводятся обозначения:

$$w_0 = w,$$
$$w_j = -Q_{j-1} S_j \left(I + c \cdot (-1)^{j+1} A_{j-1}^- S_j\right)^{-1} A_{j-1}^- w_{j-1} + c^{-1} (-1)^{j+1} Q_{j-1} w_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

Перейдем к решению исходного уравнения. Оно решается в несколько шагов с применением метода каскадной декомпозиции уравнения. Применяется утверждение леммы 1.1.

1 шаг. Уравнение (2.1) равносильно системе

$$v = A^-(-cv + w) + Pv, \tag{2.3}$$

$$Q(-cv + w) = 0 \tag{2.4}$$

с искомым элементом $Pv \in \operatorname{Ker} A$. Из соотношения (2.3) имеем:

$$(I + c \cdot A^-)v = A^- w + Pv. \tag{2.5}$$

Пусть выполнено условие:

$$\left\| c \cdot A^- \right\| < 1.$$

Тогда равенство (2.5) можно обратить:

$$v = \left(I + c \cdot A^-\right)^{-1} A^- w + \left(I + c \cdot A^-\right)^{-1} Pv. \tag{2.6}$$

Подставив (2.6) в (2.4), с учетом обозначений (2.2), получим уравнение

$$Q\left(I + c \cdot A^-\right)^{-1} Pv = w_1. \tag{2.7}$$

Пусть $p = 1$ и выполнены равенства:

$$(A^-)^j P = 0, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Тогда, раскрыв левую часть уравнения (2.7), получим уравнение

$$QPv = w_1,$$

то есть (так как $P^2 = P$) уравнение

$$QP(Pv) = w_1,$$

которое в силу обратимости оператора $A_1 = QP$ имеет решение

$$Pv = A_1^{-1} w_1. \tag{2.8}$$

Подставив выражение (2.8) в (2.6), получим искомое решение уравнения.

Если же $p \neq 1$, то переходим к следующему шагу.

2 шаг. Пусть $p = 2$ и выполнены равенства:

$$(A^-)^j P = 0, \quad j = 2, 3, \ldots .$$

Тогда раскрытие уравнения (2.7) приводит к уравнению

$$QPv - c \cdot QA^- Pv = w_1. \tag{2.9}$$

В силу Φ_0-свойства оператора A_1, (2.9) равносильно системе

$$Pv = c \cdot A_1^- QA^- Pv + A_1^- w_1 + P_1 v, \tag{2.10}$$

$$c \cdot Q_1 QA^- Pv + Q_1 w_1 = 0 \tag{2.11}$$

с искомым элементом $P_1 v \in \operatorname{Ker} A_1$. Уравнение (2.10) — это уравнение относительно элемента Pv :

$$(I - c \cdot A_1^- QA^-)Pv = A_1^- w_1 + P_1 v,$$

которое при выполнении условия

$$\left\| c \cdot A_1^- QA^- \right\| < 1$$

можно обратить:

$$Pv = (I - c \cdot A_1^- QA^-)^{-1} A_1^- w_1 + (I - c \cdot A_1^- QA^-)^{-1} P_1 v. \tag{2.12}$$

Подстановка выражения (2.12) в (2.11) с учетом обозначений (2.2) приводит к уравнению относительно элемента $P_1 v$:

$$Q_1 QA^- (I - c \cdot A_1^- QA^-)^{-1} P_1 v = w_2. \tag{2.13}$$

Пусть выполнены равенства:

$$(A_1^- QA^-)^j P_1 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Тогда уравнение (2.13) приводится к уравнению

$$Q_1 QA^- P_1 v = w_2,$$

то есть к уравнению

$$Q_1 Q A^- P_1 (P_1 v) = w_2,$$

которое в силу обратимости оператора $A_2 = Q_1 Q A^- P_1$ имеет решение

$$P_1 v = A_2^{-1} w_2. \tag{2.14}$$

Подставив сначала выражение (2.14) в (2.12); затем подставив полученное выражение в (2.6), получим искомое решение уравнения.

Дальнейшее расщепление исходного уравнения производится аналогично.

Получен следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие 2.1. Пусть выполнены неравенства:*

$$\left\| c \cdot A_j^- S_{j+1} \right\| < 1, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{2.15}$$

Пусть выполнены соотношения:

$$(A_j^- S_{j+1})^{p+i-j} P_j = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{2.16}$$

Тогда уравнение (2.1) *имеет решение, определяемое по формулам:*

$$\begin{aligned} &v = (I + c \cdot A^-)^{-1} (A^- w + v_0), \\ &v_j = (I + c \cdot (-1)^{j+1} \cdot A_{j+1}^- S_{j+2})^{-1} (A_{j+1}^- w_{j+1} + v_{j+1}), \quad j = 0, 1, \ldots, p-2, \\ &v_{p-1} = A_p^{-1} w_p, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где w_j *определяются по формулам* (2.2).

З а м е ч а н и е 2.1. Решение предельного уравнения (1.2) определяется по той же формуле (2.17).

3. Оценка на полугрупповой оператор оператора $A + c \cdot I$

Введем следующие обозначения: $A_c = A + c \cdot I$, $U_c(t)$ — полугрупповой оператор, порожденный оператором A_c, $\omega_c = \omega + |c|$, $R_c(\lambda)$ — резольвента оператора A_c.

Пусть задача Коши для уравнения (1.3) равномерно корректна и имеет тип ω.

Выразим резольвенту $R_c(\lambda)$ через резольвенту $R(\lambda)$. Применим соотношение

$$R_c(\lambda) = R(\lambda - c)$$

и тождество Гильберта

$$R(\mu_1) - R(\mu_2) = (\mu_1 - \mu_2) R(\mu_1) R(\mu_2).$$

Взяв $\mu_1 = \lambda$, $\mu_2 = \lambda - c$, получим равенство

$$R(\lambda) = (I + c \cdot R(\lambda)) R_c(\lambda). \tag{3.1}$$

Пусть выполнено неравенство

$$\|c \cdot R(\lambda)\| < 1. \tag{3.2}$$

Тогда соотношение (3.1) обращается слева:

$$R_c(\lambda) = (I + c \cdot R(\lambda))^{-1} R(\lambda).$$

Раскроем последнее равенство:

$$R_c(\lambda) = (\sum_{k=0}^{\infty} c^k (-1)^k R^k(\lambda)) R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c^k (-1)^k R^{k+1}(\lambda) = -c^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c^{k+1} (-1)^{k+1} R^{k+1}(\lambda).$$

Пусть выполнено условие

$$0 < \frac{|c|}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} < 1,$$

то есть

$$\operatorname{Re}\lambda > \omega_c. \tag{3.3}$$

Оценим резольвенту $R_c(\lambda)$, пользуясь неравенством (1.4):

$$\begin{aligned} \|R_c(\lambda)\| &= \left|c^{-1}\right| \cdot \left\| \sum_{k=0}^{\infty} c^{k+1} (-1)^{k+1} R^{k+1}(\lambda) \right\| \leqslant \left|c^{-1}\right| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left|c^{k+1}\right| \cdot \left\|R^{k+1}(\lambda)\right\| \leqslant \\ &\leqslant \left|c^{-1}\right| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |c|^{k+1} \cdot \frac{\mu}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{k+1}} = \mu \left|c^{-1}\right| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|c|}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \right)^{k+1} = \frac{\mu}{\operatorname{Re}\lambda - \omega_c}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

При этом, в силу теоремы 1.1, для полугруппы $U_c(t)$ справедлива оценка:

$$\|U_c(t)\| \leqslant \mu e^{\omega_c t}. \tag{3.5}$$

З а м е ч а н и е 3.1. При выполнении условия (3.3) имеет место неравенство (3.2).

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть задача Коши для уравнения* (1.3) *равномерно корректна и имеет тип* ω. *При выполнении условия* (3.3) *задача Коши для уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = A_c w(t)$$

также равномерно корректна. Для резольвенты $R_c(\lambda)$ *оператора* A_c *имеет место оценка* (3.4). *При этом для соответствующей полугруппы* $U_c(t)$ *имеет место оценка* (3.5).

4. Асимптотическое решение задачи (0.1), (0.2)

Для вычисления компонент разложения (0.3) воспользуемся методом Васильевой–Вишика–Люстерника, разработанным в работах [12, 4]. Получим уравнения первого итерационного процесса:

$$A_c x_0(t) = -F(t), \tag{4.1}$$

$$A_c x_k(t) = \frac{dx_{k-1}}{dt}, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \tag{4.2}$$

уравнения второго итерационного процесса:

$$\frac{dv_k}{d\tau} = A_c v_k(\tau), \quad k = 0, 1, \ldots, m; \tag{4.3}$$

уравнение для остаточного члена:

$$\varepsilon \frac{dR_m}{dt} = A_c R_m(t, \varepsilon) - \varepsilon^{m+1} \frac{dx_m}{dt}; \tag{4.4}$$

уравнения для нахождения начальных значений:

$$\begin{aligned} &x_0(0) + v_0(0) = x^0, \\ &x_k(0) + v_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$R_m(0, \varepsilon) = 0. \tag{4.6}$$

Решение уравнений первого итерационного процесса

Уравнения первого итерационного процесса (4.1), (4.2) — это уравнения вида (2.1). Применим к ним результаты, полученные в главе 2.

Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &F_{00}(t) = -F(t), \\ &F_{0j}(t) = -Q_{j-1} S_j \big(I + c \cdot (-1)^{j+1} A^-_{j-1} S_j\big)^{-1} A^-_{j-1} F_{0\ j-1} + c^{-1} (-1)^{j+1} Q_{j-1} F_{0\ j-1}(t), \\ &F_{k0}(t) = \frac{dx_{k-1}}{dt}, \\ &F_{kj}(t) = -Q_{j-1} S_j \big(I + c \cdot (-1)^{j+1} A^-_{j-1} S_j\big)^{-1} A^-_{j-1} F_{k\ j-1}(t) + \\ &+ c^{-1} (-1)^{j+1} Q_{j-1} F_{k\ j-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Пусть выполнено условие 2.1. Пусть функция $F(t)$ непрерывно дифференцируема m раз. Пусть выполнены неравенства (2.15) и соотношения (2.16). Тогда уравнения (4.1), (4.2) имеют решения, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} &x_0(t) = \big(I + c \cdot A^-\big)^{-1} \big(-A^- F(t) + y_{00}(t)\big), \\ &y_{0j}(t) = \big(I + c \cdot (-1)^{j+1} A^-_{j+1} S_{j+2}\big)^{-1} \big(A^-_{j+1} F_{0\ j+1}(t) + y_{0\ j+1}(t)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, p-2, \\ &y_{0\ p-1}(t) = A_p^{-1} F_{0p}(t); \\ &x_k(t) = \big(I + c \cdot A^-\big)^{-1} \Big(A^- \frac{dx_{k-1}}{dt} + y_{k0}(t)\Big), \\ &y_{kj}(t) = \big(I + c \cdot (-1)^{j+1} A^-_{j+1} S_{j+2}\big)^{-1} \big(A^-_{j+1} F_{k\ j+1}(t) + y_{k\ j+1}(t)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, p-2, \\ &y_{k\ p-1}(t) = A_p^{-1} F_{kp}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Решение уравнений второго итерационного процесса

Решение уравнений (4.3) с начальным значением $v_k(0)$ равно [11]

$$v_k(\tau) = U_c(t)v_k(0), \quad k = 0, 1, \dots, m. \tag{4.9}$$

Пусть задача Коши для уравнения (1.3) равномерно корректна и имеет тип ω. Функции (4.9) являются функциями погранслоя тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\omega_c < 0, \tag{4.10}$$

вытекающее из оценки (3.5) теоремы 3.1. Это условие регулярности вырождения.

Начальные значения $v_k(0)$ определяются из соотношений (4.5) и формул (4.8) для $x_k(t)$ при $t = 0$.

5. Асимптотичность разложения (0.3)

Вводится оператор $A_\varepsilon = \varepsilon^{-1}A_c$ и его полугрупповой оператор $U_\varepsilon(t)$.

Решив уравнение (4.4) с начальным условием (4.6), получим:

$$R_m(t,\varepsilon) = -\varepsilon^m \int\limits_0^t U_\varepsilon(t-s)\frac{dx_m}{ds}\,ds. \tag{5.1}$$

Для доказательства асимптотичности разложения (0.3) достаточно установить справедливость следующего соотношения на остаточный член $R_m(t,\varepsilon)$:

$$R_m(t,\varepsilon) = o(\varepsilon^m(x_m(t) + v_m(\tau)), \quad \varepsilon \to 0, \quad t \in [0,T],$$

то есть оценки:

$$\|R_m(t,\varepsilon)\| \leqslant \mu_1\varepsilon^{m+1}, \quad \mu_1 = \mathrm{const},$$

или, как это следует из соотношения (5.1), оценки:

$$\left\|\int\limits_0^t U_\varepsilon(t-s)\frac{dx_m}{ds}\,ds\right\| < \mu_1 \cdot \varepsilon.$$

Справедлива оценка, вытекающая из неравенства (3.5):

$$\|U_\varepsilon(t)\| = \left\|U_c\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\| \leqslant \mu_1 \exp\left(\omega_c \cdot \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad m_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{5.2}$$

В силу ограниченности полугруппы $U_\varepsilon(t)$ и функции $\dfrac{dx_m}{dt}$, имеем:

$$\left\|\int\limits_0^t U_\varepsilon(t-s)\frac{dx_m}{ds}\,ds\right\| \leqslant \mu_2 \int\limits_0^t \|U_\varepsilon(t-s)\|\,ds, \quad \mu_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Пусть выполнено условие (4.10). Оценим интеграл в правой части последнего неравенства, пользуясь оценкой (5.2):

$$\int_0^t \|U_\varepsilon(t-s)\|\,ds \leqslant \mu_2 \int_0^t \exp\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon}\cdot(t-s)\right)\,ds = -\mu_2\frac{\varepsilon}{\omega_c}\left(1-\exp\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon}\cdot t\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant -\mu_2\frac{\varepsilon}{\omega_c}\left(1-\exp\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon}\cdot T\right)\right) = -\frac{\mu_2}{\omega_c}\left(1-\exp\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon}\cdot T\right)\right)\cdot\varepsilon = \mu_3\cdot\varepsilon, \quad \mu_3 = \mathrm{const} > 0.$$

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть задача Коши для уравнения* (1.3) *равномерно корректна и имеет тип* ω. *Пусть функция* $F(t)$ *непрерывно дифференцируема* m *раз. Пусть выполнено условие* (4.10). *Тогда имеет место асимптотическое разложение* (0.3) *решения задачи* (0.1), (0.2).

Пусть выполнено условие 2.1. Пусть выполнены неравенства (2.15) *и соотношения* (2.16). *Тогда компоненты* $x_k(t)$ *разложения определяются по формулам* (4.8), (4.7) *и являются непрерывно дифференцируемыми функциями.*

Компоненты $v_k(\tau)$ *разложения определяются по формулам* (4.9), (4.5).

Теорема 5.2. *Имеет место следующее поведение решения* $x(t,\varepsilon)$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Случай 1) имеет место, если все точки спектра оператора* A *находятся в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda < \omega_c < 0$. *Случай 3) — если хотя бы одна точка спектра оператора* A *находится в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > |c|$. *Случай 4) имеет место, если хотя бы одна точка спектра оператора* A *находится в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda = |c|$, *а остальные — в* $\operatorname{Re}\lambda < |c|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. Вып. 5 (77). С. 3-122.

2. *Зубова С.П., Усков В.И.* Приложения матрично-дифференциального оператора к решению задач для уравнений в частных производных // Итоги науки: избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. М.: РАН, 2017. Вып. 31. 253 с.

3. *Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Асимптотический метод в задаче о колебаниях сильно вязкой жидкости // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33. № 3. С. 456-464.

4. *Треногин В.А.* Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника–Вишика // Успехи математических наук. 1970. Т. 25. Вып. 4 (154). С. 123-156.

5. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского госуниверситета, 2011. 456 с.

6. *Зубова С.П., Усков В.И.* Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 3. С. 143-155.

7. *Никольский С.М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. Вып. 3. С. 147-166.

8. *Зубова С.П., Черныш*о*в К.И.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовским оператором при производной // Дифференциальные уравнения и их применение. 1976. Вып. 14. С. 21-39.

9. *Зубова С.П., Усков В.И.* Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай // Математические заметки. 2018. Т. 103. Вып. 3. С. 392-403.

10. *Зубова С.П.* О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной // Доклады Академии наук. 2014. Т. 454. № 4. С. 383-386.

11. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

12. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Поступила в редакцию 23 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 24 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Усков Владимир Игоревич, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация, ассистент, кафедра математики, e-mail: vum1@yandex.ru

Для цитирования: *Усков В.И.* Асимптотическое решение уравнения первого порядка с малым параметром при производной с возмущенным оператором // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 784–796. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796

ASYMPTOTIC SOLUTION OF FIRST-ORDER EQUATION WITH SMALL PARAMETER UNDER THE DERIVATIVE WITH PERTURBED OPERATOR

V. I. Uskov

Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394087, Russian Federation
E-mail: vum1@yandex.ru

Abstract. The paper is devoted to the Cauchy problem for a differential equation with a small parameter when using a Fredholm operator in a Banach space with a certain method. The investigated effect of this parameter. The solution is in the form of an asymptotic expansion. When solving the problems of using the cascade decomposition method for equations, which allows us to split the equation into equations in subspaces.
Keywords: differential equation; asymptotic solution; small parameter; perturbation in the right-hand side; Fredholm operator; boundary layer phenomenon

REFERENCES

1. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regulyarnoye vyrozhdeniye i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom [Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1957, vol. 12, no. 5 (77), pp. 3-122. (In Russian).

2. Zubova S.P., Uskov V.I. Prilozheniya matrichno-differentsial'nogo operatora k resheniyu zadach dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh [Applications of the matrix-differential operator to the solution of problems for partial differential equations]. *Izbrannyye trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma po fundamental'nym i prikladnym problemam nauki «Itogi nauki»* [Selected Works of the International Symposium on Fundamental and Applied Problems of Science "The Results of Science"]. Moscow, RAS Publ., 2017, no. 31, 253 p. (In Russian).

3. Krein S.G., Ngo Zuy Kan Asimptoticheskiy metod v zadache o kolebaniyakh sil'no vyazkoy zhidkosti [Asymptotic method in the problem of oscillations of a highly viscous fluid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 33, no. 3, pp. 456-464. (In Russian).

4. Trenogin V.A. Razvitiye i prilozheniya asimptoticheskogo metoda Lyusternika-Vishika [Development and applications of the Lyusternik-Vishik asymptotic method]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, no. 4 (154), pp. 123-156. (In Russian).

5. Lomov S.A., Lomov I.S. *Osnovy matematicheskoy teorii pogranichnogo sloya* [Fundamentals of the Mathematical Theory of the Boundary Layer]. Moscow, Moscow State University Publ., 2011, 456 p. (In Russian).

6. Zubova S.P., Uskov V.I. Asimptoticheskoye resheniye singulyarno vozmushchennoy zadachi Koshi dlya uravneniya pervogo poryadka v banakhovom prostranstve [The asymptotic solution

of a singularly perturbed cauchy problem for the first-order equation in a Banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 143-155. (In Russian).

7. Nikolsky S.M. Lineynyye uravneniya v lineynykh normirovannykh prostranstvakh [Linear equations in linear normed spaces]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya – Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1943, vol. 7, no. 3, pp. 147-166. (In Russian).

8. Zubova S.P., Chernyshov K.I. O lineynom differentsial'nom uravnenii s fredgol'movskim operatorom pri proizvodnoy [On a linear differential equation with a Fredholm operator under the derivative]. *Differentsial'nyye uravneniya i ikh primeneniye – Differential Equations and Its Applications*, 1976, no. 14, pp. 21-39. (In Russian).

9. Zubova S.P., Uskov V.I. Asimptoticheskoye resheniye zadachi Koshi dlya uravneniya pervogo poryadka s malym parametrom v banakhovom prostranstve. Regulyarnyy sluchay [Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 3, pp. 392-403. (In Russian).

10. Zubova S.P. O roli vozmushcheniy v zadache Koshi dlya uravneniya s fredgol'movym operatorom pri proizvodnoy [On the role of perturbations in the Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator under the derivative]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2014, vol. 454, no. 4, pp. 383-386. (In Russian).

11. Krein S.G. *Lineynyye differentsial'nyye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 464 p. (In Russian).

12. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskiye razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy* [Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 272 p. (In Russian).

Received 23 April 2018
Reviewed 24 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Uskov Vladimir Igorevich, Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov, Voronezh, the Russian Federation, Assistant, Department of Mathematics, e-mail: vum1@yandex.ru

For citation: Uskov V.I. Asimptoticheskoe reshenie uravneniya pervogo poryadka s malym parametrom pri proizvodnoj s vozmushchennym operatorom [Asymptotic solution of first-order equation with small parameter under the derivative with perturbed operator]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 784–796. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796 (In Russian, Abstr. in Engl.).